Faculdade
de Ciências
da Universidade
de Lisboa

PRÁTICAS DE CARTOGRAFIA

DEGGE – LICENCIATURA EM ENGENHARIA GEOESPACIAL

2021/2022

ALGUNS CONCEITOS

SISTEMAS DE REFERÊNCIA ADOTADOS EM PORTUGAL

Direção-Geral do Território (DGT)

https://www.dgterritorio.gov.pt/geodesia/sistemas-referencia

Portugal Continental	
ED50 - European Datum 1950 (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TM06-ETRS89) **Bessel Datum Lisboa** (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TM06-ETRS89) **Datum Lisboa** (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TM06-ETRS89) **Datum 73** (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TM06-ETRS89)	**PT-TM06/ETRS89** - European Terrestrial Reference System 1989

Arquipélago dos Açores	Arquipélago da Madeira	Regiões Autónomas
Datum S. Braz - S. Miguel (Grupo Oriental do Arquipélago dos Açores) **Datum Base SW - Graciosa** (Grupo Central do Arquipélago dos Açores) **Datum Observatório** - Flores (Grupo Ocidental do Arquipélago dos Açores)	**Datum Base SE** - Porto Santo (Arquipélago da Madeira)	**PTRA08-UTM/ITRF93** - realização do International Terrestrial Reference Frame 1993

Centro de Informação Geoespacial do Exército (CIGeoE)

https://www.igeoe.pt/index.php?id=38&cat=3

Portugal Continental	
Datum Lisboa militares (Obsoleto - Substituído pelo sistema TM/WGS84)	**WGS84 / TM (Gauss-Kruger)**

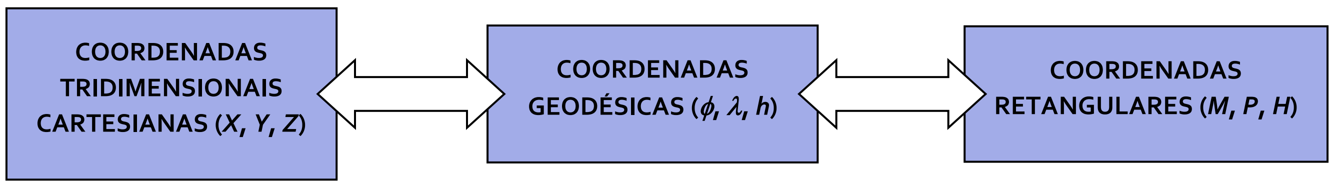
Regiões Autónomas
WGS 84 / UTM

TIPOS DE COORDENADAS

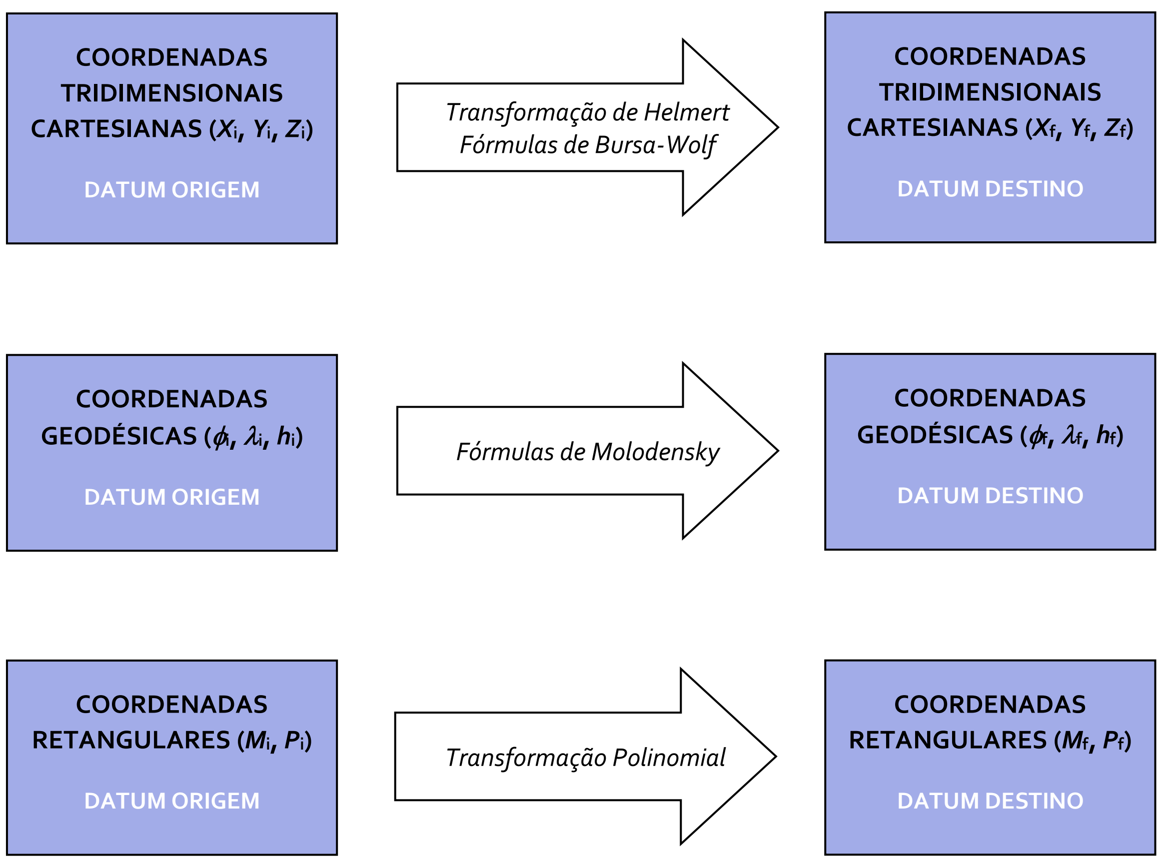
Coordenadas	V.G. Aboboreira (Beja) PT-TM06-ETRS89
Cartesianas (*X*, *Y*, *Z*)	*X*= 4 993 821.5571 m *Y*= -676 850.4038 m *Z*= 3 896 819.7516 m
Geodésicas ou geográficas (ϕ, λ, *h*)	ϕ= 37° 53' 58.7635" N λ= 07° 43' 07.2999" W Gr *h*= 257.85 m
Retangulares (*M*, *P*)	*M*= 36 448.61 m *P*= -196 253.96 m *H*= 202.90 m

TRANSFORMAÇÃO ENTRE COORDENADAS

TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS NUM MESMO *DATUM*



TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS ENTRE DIFERENTES *DATA*



EXERCÍCIO 1

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação direta das coordenadas geodésicas (ϕ, λ) dos seguintes vértices geodésicos nas correspondentes coordenadas retangulares (*M*, *P*).

V.G. Aboboreira (Beja)			V. G. Cabeço da Ponta (Porto Santo - Madeira)
PT-TM06/ETRS89	**Datum Lisboa**	**Datum 73**	**PTRA08-UTM/ITRF93**
ϕ= 37° 53' 58.7635" N λ= 07° 43' 07.2999" WGr *h*= 257.85 m	ϕ= 37° 53' 53.17608" N λ= 07° 43' 03.09455" WGr *h*= 208.7901 m	ϕ= 37° 53' 56.01135" N λ= 07° 43' 10.59207" WGr *h*= 204.8015 m	ϕ= 33° 02' 15.2697" N λ= 16° 21' 41.8679" WGr *h*= 32.27 m
M= 36 448.61 m *P*= -196 253.96 m	*M*= 36 448.0117 m *P*= -196 254.9317 m	*M*= 36 445.0373 m *P*= -196 255.3140 m	*M*= 372 851.2519 m *P*= 3 656 276.3028 m

A transformação direta das coordenadas geodésicas (ϕ, λ) de um ponto nas correspondentes coordenadas planas (*x*, *y*) através da projeção de Gauss (também conhecida por Transversa de Mercator) é definida por via analítica através das fórmulas obtidas por desenvolvimento em série:

$$y = k_0.(\sigma + \frac{\lambda^2}{2} \cdot N \cdot sin\phi.cos\phi + \frac{\lambda^4}{24} \cdot N \cdot sin\phi.cos^3\phi.k_2 + \frac{\lambda^6}{720} \cdot N \cdot sin\phi.cos^5\phi.k_4 + \frac{\lambda^8}{40320} \cdot N \cdot sin\phi.cos^7\phi.k_6)$$

$$x = k_0.(\lambda.N.cos\phi + \frac{\lambda^3}{6} \cdot N cos^3\phi.k_1 + \frac{\lambda^5}{120} \cdot N cos^5\phi.k_3 + \frac{\lambda^7}{5040} \cdot N cos^7\phi.k_5)$$

sendo k_0 o fator de escala, σ o comprimento do arco de meridiano desde o paralelo origem até ao paralelo do ponto, λ a diferença de longitude entre o ponto e o meridiano central da projeção (λ-λ_0), ϕ a latitude geográfica do ponto, *N* a grande normal à latitude ϕ:

$$N = \frac{a}{\left(1 - e^2.sin^2\phi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

(*a*, e^2) os parâmetros caraterísticos do elipsoide de referência e ρ o raio de curvatura do meridiano à latitude ϕ:

$$\rho = \frac{a.\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2.\sin^2\phi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$e^2 = f\cdot(2-f)$$

onde *e* é a excentricidade do elipsoide e *f* é o achatamento do elipsoide; e ainda

$$k_1 = \frac{N}{\rho} - tg^2\phi$$

$$k_2 = \frac{N}{\rho} + 4\cdot\frac{N^2}{\rho^2} - tg^2\phi$$

$$k_3 = 4\cdot\frac{N^3}{\rho^3}\cdot(1-6\cdot tg^2\phi) + \frac{N^2}{\rho^2}\cdot(1+8\cdot tg^2\phi) - 2\cdot\frac{N}{\rho}\cdot tg^2\phi + tg^4\phi$$

$$k_4 = 8\cdot\frac{N^4}{\rho^4}\cdot(11-24\cdot tg^2\phi) - 28\cdot\frac{N^3}{\rho^3}\cdot(1-6\cdot tg^2\phi) + \frac{N^2}{\rho^2}\cdot(1-32\cdot tg^2\phi) - 2\cdot\frac{N}{\rho}\cdot tg^2\phi + tg^4\phi$$

$$k_5 = 61 - 479\cdot tg^2\phi + 179\cdot tg^4\phi - tg^6\phi$$

$$k_6 = 1385 - 3111\cdot tg^2\phi + 543\cdot tg^4\phi + tg^6\phi$$

Na projeção de Gauss, aplicada à cartografia portuguesa, usa-se um fator de escala k_0= 1, dada a pequena largura da nossa faixa continental. A projeção UTM é a projeção de Gauss aplicada a cada um dos 60 fusos, de 6° cada, em que podemos dividir o globo terrestre, tomando-se k_0= 0,9996 (valor escolhido de modo a tornar iguais as deformações da carta no meridiano médio e nos meridianos limítrofes do fuso).

O comprimento aproximado do arco de meridiano σ entre quaisquer duas latitudes ϕ_0 e ϕ é determinado através de:

$$\sigma = a\cdot\left(1-e^2\right)\cdot\left\{A\cdot\left(\phi-\phi_0\right) - \frac{B}{2}\cdot\left(\sin 2\phi - \sin 2\phi_0\right) + \frac{C}{4}\cdot\left(\sin 4\phi - \sin 4\phi_0\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{D}{6}\cdot\left(\sin 6\phi - \sin 6\phi_0\right) + \frac{E}{8}\cdot\left(\sin 8\phi - \sin 8\phi_0\right) - \frac{F}{10}\cdot\left(\sin 10\phi - \sin 10\phi_0\right)\right\}$$

com

$$A = 1 + \frac{3}{4} \cdot e^2 + \frac{45}{64} \cdot e^4 + \frac{175}{256} \cdot e^6 + \frac{11025}{16384} \cdot e^8 + \frac{43659}{65536} \cdot e^{10} + \ldots$$

$$B = \frac{3}{4} \cdot e^2 + \frac{15}{16} \cdot e^4 + \frac{525}{512} \cdot e^6 + \frac{2205}{2048} \cdot e^8 + \frac{72765}{65536} \cdot e^{10} + \ldots$$

$$C = \frac{15}{64} \cdot e^4 + \frac{105}{256} \cdot e^6 + \frac{2205}{4096} \cdot e^8 + \frac{10395}{16384} \cdot e^{10} + \ldots$$

$$D = \frac{35}{512} \cdot e^6 + \frac{315}{2048} \cdot e^8 + \frac{31185}{131072} \cdot e^{10} + \ldots$$

$$E = \frac{315}{16384} \cdot e^8 + \frac{3465}{65536} \cdot e^{10} + \ldots$$

$$F = \frac{3465}{131072} \cdot e^{10} + \ldots$$

	PT-TM06/ETRS89	**Datum Lisboa**	**Datum 73**	**PTRA08-UTM/ITRF93**
Elipsoide de referência:	GRS80 a = 6 378 137 m f = 1 / 298.257 222 101	Hayford (ou Internacional 1924) a = 6 378 388 m f = 1/297	Hayford (ou Internacional 1924) a = 6 378 388 m f = 1/297	GRS80 a = 6 378 137 m f = 1 / 298.257 222 101
Projeção cartográfica:	Transversa de Mercator	Transversa de Mercator	Transversa de Mercator	Transversa de Mercator
Latitude da origem das coordenadas retangulares:	39° 40’ 05.73” N	39° 40’ 00” N	39° 40’ 00” N	0°
Longitude da origem das coordenadas retangulares:	08° 07' 59.19” W	08° 07' 54.862” W	08° 07' 54.862” W	33° W (fuso 25) 27° W (fuso 26) 15° W (fuso 28)
Falsa origem das coordenadas retangulares:	Em M: 0 m Em P: 0 m	Em M: 0 m Em P: 0 m	Em M: +180.598 m Em P: -86.990 m	Em M: +500 000 m Em P: 0 m
Coeficiente de redução de escala no meridiano central:	1	1	1	0.9996

EXERCÍCIO 2

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação inversa das coordenadas retangulares (*M*, *P*) dos vértices geodésicos utilizados no exercício 1 nas correspondentes coordenadas geodésicas (ϕ, λ).

Para efetuar a transformação inversa das coordenadas planas Gauss (ou UTM) nas correspondentes coordenadas geodésicas basta utilizar um processo iterativo:

1) Toma-se como ponto de partida um valor aproximado para ϕ (ϕ_{ap}), saído de um cálculo anterior ou considerando um valor aproximado para o arco de meridiano σ:

$$\sigma_{ap} = \frac{P}{k_0}$$

sendo *P* a distância à perpendicular; donde a primeira aproximação para ϕ é dada por:

$$\phi = \phi_0 + \frac{\sigma_{ap}}{A \cdot a \cdot \left(1 - e^2\right)}$$

2) Com base neste valor aproximado da latitude recalcula-se o comprimento de arco de meridiano σ usando a expressão:

$$\sigma = a \cdot \left(1 - e^2\right) \cdot \left\{ A \cdot \left(\phi - \phi_0\right) - \frac{B}{2} \cdot \left(\sin 2\phi - \sin 2\phi_0\right) + \frac{C}{4} \cdot \left(\sin 4\phi - \sin 4\phi_0\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{D}{6} \cdot \left(\sin 6\phi - \sin 6\phi_0\right) + \frac{E}{8} \cdot \left(\sin 8\phi - \sin 8\phi_0\right) - \frac{F}{10} \cdot \left(\sin 10\phi - \sin 10\phi_0\right) \right\}$$

3) Com este novo valor para σ podemos determinar a correção a aplicar a ϕ através de:

$$\Delta\phi = \frac{\left(\sigma_{ap} - \sigma\right)}{\rho}$$

onde

$$\rho = \frac{a.\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - e^2.\sin^2\phi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

sendo o novo valor da latitude igual a:

$$\phi' = \phi + \Delta\phi$$

4) Entra-se de seguida num processo iterativo, recalculando σ, ρ e $\Delta\phi$ e o novo valor da ϕ' até que $\Delta\phi$ seja inferior à precisão desejada (10^{-10});

5) Com o valor da latitude ϕ' resultante do processo iterativo, calcula-se a latitude e longitude do ponto, através das seguintes expressões:

$$\phi = \phi' - \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho}\right)\cdot\left(\frac{M^2}{2 \cdot k_0 \cdot N}\right) + \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho}\right)\cdot\left(\frac{M^4}{24 \cdot k_0{}^3 \cdot N^3}\right)\cdot\left(-4\psi^2 + 9\psi\cdot\left(1-t^2\right) + 12t^2\right) -$$
$$-\left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho}\right)\cdot\left(\frac{M^6}{720 \cdot k_0{}^5 \cdot N^5}\right)\cdot\left(8\psi^4\cdot\left(11-24t^2\right) - 12\psi^3\cdot\left(21-71t^2\right) + 15\psi^2\cdot\left(15-98t^2+15t^4\right) +\right.$$
$$\left. +180\psi\cdot\left(5t^2-3t^4\right) - 360t^4\right) + \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho}\right)\cdot\left(\frac{M^8}{40320 \cdot k_0{}^7 \cdot N^7}\right)\cdot\left(1385 + 3633t^2 + 4095t^4 + 1575t^6\right)$$

$$\left(\lambda - \lambda_0\right)\cdot\cos\phi' = \left(\frac{M}{k_0 \cdot N}\right) - \left(\frac{M^3}{6 \cdot k_0{}^3 \cdot N^3}\right)\cdot\left(\psi + 2t^2\right) +$$
$$+\left(\frac{M^5}{120 \cdot k_0{}^5 \cdot N^5}\right)\cdot\left(-4\psi^3\cdot\left(1-6t^2\right) + \psi^2\cdot\left(9-68t^2\right) + 72\psi t^2 + 24t^4\right) -$$
$$-\left(\frac{M^7}{5040 \cdot k_0{}^7 \cdot N^7}\right)\cdot\left(61 + 662t^2 + 1320t^4 + 720t^6\right)$$

sendo M a distância à meridiana, $\psi = \dfrac{N}{\rho}$, calculado com o valor da latitude ϕ', e $t = tg\phi'$.

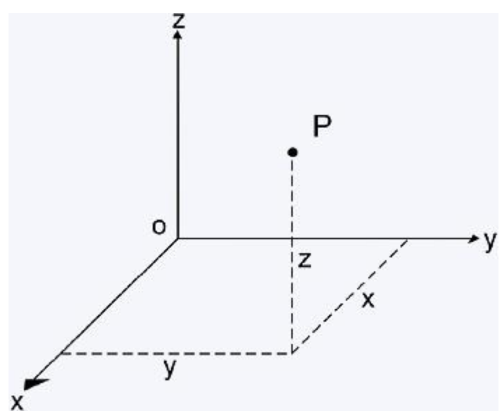
EXERCÍCIO 3

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação direta entre coordenadas geodésicas (ϕ, λ, h) dos seguintes vértices geodésicos nas correspondentes coordenadas cartesianas tridimensionais (X, Y, Z).

V.G. Aboboreira (Beja)	V. G. Cabeço da Ponta (Porto Santo - Madeira)
PT-TM06/ETRS89	**PTRA08-UTM/ITRF93**
ϕ= 37° 53' 58.7635" N λ= 07° 43' 07.2999" WGr h= 257.85 m	ϕ= 33° 02' 15.2697" N λ= 16° 21' 41.8679" WGr h= 32.27 m
X= 4 993 821.5571 m Y= -676 850.4038 m Z= 3 896 819.7516 m	X= 5 135 480.8889 m Y= -1 507 717.9053 m Z= 3 457 470.4300 m

Considerando um triedro cartesiano OXYZ centrado com o elipsoide de referência, com o eixo dos ZZ coincidente com o seu eixo de revolução, com o eixo dos XX assente no semi-plano origem das longitudes geodésicas e o eixo dos YY escolhido de modo a tornar o triedro direto, as coordenadas geodésicas (ϕ, λ, h) de um ponto genérico relacionam-se com as suas coordenadas cartesianas tridimensionais (X, Y, Z) por meio das seguintes expressões:

$$X = (N+h)\cdot\cos\phi\cdot\cos\lambda$$
$$Y = (N+h)\cdot\cos\phi\cdot\sin\lambda$$
$$Z = \left[\left(1-e^2\right)\cdot N + h\right]\cdot\sin\phi$$



sendo N a grande normal ao elipsoide de referência à latitude ϕ, h a altitude elipsoidal do ponto e (a, e^2) os seus parâmetros de forma. Estas expressões correspondem à transformação direta das coordenadas geodésicas (ϕ, λ, h) de um ponto nas correspondentes coordenadas cartesianas tridimensionais (X, Y, Z).

EXERCÍCIO 4

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação inversa entre coordenadas cartesianas tridimensionais (*X*, *Y*, *Z*) dos vértices geodésicos utilizados no exercício 3 nas correspondentes coordenadas geodésicas (ϕ, λ, *h*).

A transformação inversa das coordenadas cartesianas tridimensionais (*X*, *Y*, *Z*) de um ponto nas correspondentes coordenadas geodésicas (ϕ, λ, *h*) é executada recorrendo a um processo iterativo:

1) A longitude λ pode ser facilmente calculada a partir das coordenadas cartesianas tridimensionais utilizando a seguinte expressão:

$$\lambda = arctg\left(\frac{Y}{X}\right)$$

2) A latitude é obtida por um processo iterativo dado que as quantidades ϕ e *h* são dependentes uma da outra, pelo que se utiliza um valor aproximado para a latitude o qual é calculado por:

$$\phi_{ap} = arctg\left(\frac{Z}{P \cdot \left(1 - e^2\right)}\right)$$

com *P* igual a:

$$P = \left(X^2 + Y^2\right)^{1/2}$$

3) Com base neste valor aproximado da latitude calcula-se o valor de *N*, e em seguida o valor para a altitude elipsoidal *h* usando a expressão:

$$h = \frac{P}{\cos\phi} - N$$

4) O processo iterativo continua recalculando o valor de ϕ, com *N* e *h* calculados no passo anterior, utilizando a expressão:

$$\phi = arctg\left(\frac{Z + e^2 \cdot N \cdot \sin\phi}{P}\right)$$

5) Com este novo valor da latitude ϕ, recalcula-se o valor de *N*, da altitude elipsoidal *h* e em seguida um novo valor para a latitude ϕ e assim sucessivamente até alcançar a precisão desejada para a transformação (ϕ_i-ϕ_{i-1} =10^{-10}).

EXERCÍCIO 5

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação entre as coordenadas cartesianas tridimensionais (*X*, *Y*, *Z*) - Transformação de Helmert/Fórmulas de Bursa-Wolf - de dois *data* distintos.

Ponto	
Datum 73	**PT-TM06/ETRS89**
X= 4 815 286 m *Y*= -578 951 m *Z*= 4 129 745 m	*X*= 4 815 062.1368 m *Y*= -578 841.2009 m *Z*= 4 129 782.0548 m

A transformação de sete parâmetros de Helmert, expressa em formato matricial, é designada por fórmula de Bursa-Wolf e tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + (1+\alpha)\cdot \begin{bmatrix} 1 & -R_Z & R_Y \\ R_Z & 1 & -R_X \\ -R_Y & R_X & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

onde (X, Y, Z) são as coordenadas de um dado ponto no sistema de referência geocêntrico origem, (X_n, Y_n, Z_n) são as coordenadas desse mesmo ponto no sistema de referência geocêntrico destino, (ΔX, ΔY, ΔZ) são as componentes do vetor que une os centros dos dois elipsoides, (R_X, R_Y, R_Z) são os ângulos de rotação em torno dos eixos de referencial de origem e α é o fator de escala (expresso em partes por milhão - ppm).

Nota: A fórmula apresentada encontra-se em conformidade com a norma ISO 19111:2007. No entanto, é de ter em conta outras versões utilizadas em alguns programas que se refletem nos sinais e/ou no sentido das rotações.

De seguida apresentam-se os parâmetros da transformação de Bursa-Wolf do datum Lisboa e datum 73 para PT-TM06-ETRS89 retirados do sítio da Direção-Geral do Território (https://www.dgterritorio.gov.pt/geodesia/transformacao-coordenadas/portugal-continental) em fevereiro de 2022.

Parâmetros de Transformação de Bursa-Wolf do Datum Lisboa e Datum 73 para PT-TM06-ETRS89		
	Datum Lisboa para PT-TM06/ETRS89	**Datum 73 para PT-TM06/ETRS89**
ΔX (m)	-283.088	-230.994
ΔY (m)	-70.693	+102.591
ΔZ (m)	+117.445	+25.199
R_X (")	-1.157	+0.633
R_Y (")	+0.059	-0.239
R_Z (")	-0.652	+0.900
α (ppm)	-4.058	+1.950

EXERCÍCIO 6

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação entre as coordenadas geodésicas (ϕ, λ, h) - Fórmulas de Molodensky - de dois *data* distintos.

Ponto	
Datum 73	**PT-TM06/ETRS89**
ϕ= 40° 36’ 10” N λ= 6° 51’ 17” WGr h= 826 m	ϕ= 40° 36’ 12.92913” N λ= 6° 51’ 13.48258” WGr h= 884.0728 m

A transformação de Molodensky tem cinco parâmetros tendo a seguinte forma:

$$\begin{cases} \phi_n = \phi + \dfrac{-\Delta X \sin\phi\cos\lambda - \Delta Y \sin\phi\sin\lambda + \Delta Z\cos\phi + \Delta a \dfrac{e^2 N \sin\phi\cos\phi}{a} + \Delta f \sin\phi\cos\phi\left(\dfrac{a}{b}\rho + \dfrac{b}{a}N\right)}{\rho + h} \\ \lambda_n = \lambda + \dfrac{-\Delta X \sin\lambda + \Delta Y \cos\lambda}{(N+h)\cos\phi} \\ h_n = h + \Delta X \cos\phi\cos\lambda + \Delta Y \cos\phi\sin\lambda + \Delta Z \sin\phi - \Delta a\left(\dfrac{a}{N}\right) + \Delta f\left(\dfrac{b}{a} N \sin^2\phi\right) \end{cases}$$

onde ϕ_n, λ_n, h_n são a latitude, longitude (em radianos) e a altitude elipsoidal (em metros) a obter, ϕ, λ, h são a latitude, longitude (em radianos) e a altitude elipsoidal (em metros) originais, ΔX, ΔY, ΔZ as componentes do vetor que une os centros dos dois elipsoides, a, b os semi-eixos maior e menor do elipsoide origem, e, f a primeira excentricidade e o achatamento do elipsoide origem, Δa, Δf a diferença entre os semi-eixos maiores e os achatamentos dos dois elipsoides, N o raio de curvatura do primeiro vertical (Grande Normal) e ρ o raio de curvatura do meridiano.

$$b = a \cdot (1 - f)$$

De seguida apresentam-se os parâmetros da transformação de Molodensky do datum Lisboa e datum 73 para PT-TM06-ETRS89 retirados do sítio da Direção-Geral do Território (https://www.dgterritorio.gov.pt/geodesia/transformacao-coordenadas/portugal-continental) em fevereiro de 2022.

Parâmetros de Transformação de Molodensky do Datum Lisboa e Datum 73 para PT-TM06-ETRS89		
	Datum Lisboa para PT-TM06/ETRS89	**Datum 73 para PT-TM06/ETRS89**
ΔX (m)	-303.861	-223.150
ΔY (m)	-60.693	+110.132
ΔZ (m)	+103.607	+36.711
Δa (m)	-251.000	-251.000
Δf (m)	$-1.4192686 \times 10^{-5}$	$-1.4192686 \times 10^{-5}$

EXERCÍCIO 7

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação entre as coordenadas retangulares (*M*, *P*) - Transformação Polinomial - de dois *data* distintos.

Ponto	
Datum 73	**PT-TM06/ETRS89**
M= 20 000 m *P*= 20 000 m	*M*= 19 999.7773 m *P*= 20 000.1413 m

A transformação polinomial de grau 2 permite transformar coordenadas retangulares num determinado datum nas coordenadas retangulares num outro datum:

$$M_n = a_0 + a_1 u + a_2 v + a_3 u^2 + a_4 uv + a_5 v^2$$
$$P_n = b_0 + b_1 u + b_2 v + b_3 u^2 + b_4 uv + b_5 v^2$$

onde M_n, P_n são as coordenadas retangulares a obter, X, Y as coordenadas retangulares originais, a_i, b_i os coeficientes de transformação, X_0, Y_0, h, k os parâmetros de normalização e u e v têm a seguinte forma:

$$u = \frac{X - X_0}{h} \qquad v = \frac{Y - Y_0}{k}$$

De seguida apresentam-se os parâmetros da transformação polinomial do datum Lisboa e datum 73 para PT-TM06-ETRS89 retirados do sítio da Direção-Geral do Território (https://www.dgterritorio.gov.pt/geodesia/transformacao-coordenadas/portugal-continental) em fevereiro de 2022.

Coeficientes de Transformação Polinomial de Grau 2 do Datum Lisboa e Datum 73 para PT-TM06-ETRS89		
	Datum Lisboa para PT-TM06/ETRS89	**Datum 73 para PT-TM06/ETRS89**
a_0	+1.38051	+0.28961
a_1	+129998.56256	+129999.16977
$a2$	-1.69483	-5.26888
$a3$	-0.57226	+0.32257
$a4$	-2.9606	-0.87853
$a5$	-2.45601	-1.22237
$b0$	+0.80894	-0.08867
$b1$	+1.31669	+2.39595
$b2$	+279995.74505	+279997.91435
$b3$	+0.24888	+0.15146
$b4$	+2.65999	+1.11109
$b5$	-3.86484	-1.06143
X_0	0	0
Y_0	0	0
h	+130000	+130000
k	+280000	+280000

EXERCÍCIO 8

Considerando as coordenadas geodésicas e as correspondentes coordenadas retangulares dos vértices geodésicos ABOBOREIRA (Beja, Baixo Alentejo) e CABEÇUDO (Mogadouro, Trás-os-Montes), calcule a:

Coordenadas PT-TM06-ETRS89	V.G. Aboboreira	V.G. Cabeçudo
Geodésicas ou geográficas (ϕ, λ)	ϕ= 37° 53' 58.7635" N λ= 07° 43' 07.2999" W Gr	ϕ= 41° 19' 50.6809" N λ= 06° 26' 02.2698" W Gr
Retangulares (M, P)	M= 36 448.61 m P= -196 253.96 m	M= 142 243.53 m P= 186 002.69 m

a) deformação linear k em cada um dos vértices;

b) convergência de meridianos γ em cada um dos vértices;

c) correção tangente à corda β'' para a distância entre os 2 vértices;

d) correção de redução dos comprimentos finitos $s_1 - s$ para a distância entre os 2 vértices[1].

Deformação linear

$$k = 1 + \frac{x^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot N_0}$$

Convergência de meridianos

$$\gamma = -(\lambda - \lambda_0) \cdot sin\left(\frac{\phi + \phi_0}{2}\right)$$

Correção tangente à corda

$$\beta'' = \frac{1}{6 \cdot \rho_0 \cdot N_0 \cdot \sin 1''} \cdot \left(2 \cdot x_A + x_B\right) \cdot \left(y_B - y_A\right)$$

Correção de redução aos comprimentos finitos

$$s_1 - s = \frac{s_1}{6 \cdot \rho_0 \cdot N_0} \cdot \left(x_B^2 + x_B \cdot x_A + x_A^2\right)$$

[1] Para calcular o valor de s_1, ou seja, a geodésica entre os 2 vértices geodésicos, aceda ao seguinte link: https://geographiclib.sourceforge.io/cgi-bin/GeodSolve

Online geodesic calculations using the GeodSolve utility

Geodesic calculation:

- (•) Inverse: *lat1 lon1 lat2 lon2 → azi1 azi2 s12*
- ( ) Direct: *lat1 lon1 azi1 s12 → lat2 lon2 azi2*

Input (ex. «40.6 -73.8 49°01'N 2°33'E» [inverse], «40d38'23"N 073d46'44"W 53d30' 5850e3» [direct]):

41.33074469 -6.433963833 37.89965653 -7.718694417

Output format:	(•) decimal degrees	( ) degrees minutes seconds
Heading at point 2:	(•) forward azimuth	( ) back azimuth
Longitude:	(•) reduce to [−180°,180°]	( ) unroll
Output precision:	1mm 0.0001"	
Equatorial radius:	6378137	meters
Flattening:	1/298.257222101	

Select action:

Submit Reset

Geodesic (input in black, output in blue):

```
ellipsoid (a f)      = 6378137 1/298.257222101
status               = OK

lat1 lon1 fazi1 (°) = 41.33074469 -6.43396383 -163.43634739
lat2 lon2 fazi2 (°) = 37.89965653 -7.71869442 -164.25591684
s12 (m)              = 396583.142
```

EXERCÍCIO 9

Sabendo que os coeficientes da expressão do módulo da deformação linear na projeção de Bonne são respetivamente $e = 1 + \lambda^2(\sin\phi - r/R)^2$, $f = -\lambda(\sin\phi - r/R)$, $g = 1$, calcule os:

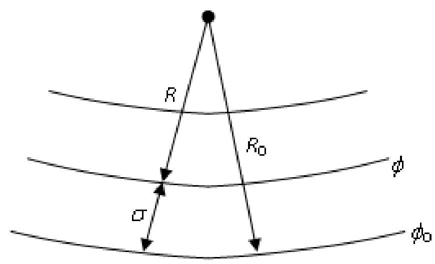
a) elementos da elipse de Tissot (semieixo maior e menor e respetivas direções);

b) módulos da deformação angular máxima e os respetivos azimutes dessas deformações;

para um ponto com as seguintes coordenadas ϕ= 50° N, λ= 10° EGr, sobre o elipsoide de Bessel (a= 6 377 397.155 m; f = 1/299.15281535). Considere o seguinte valor para a latitude da origem da projeção ϕ_0= 45° N.

Projeção de Bonne

$$\begin{cases} R_0 = N_0 \cdot \cot\phi_0 \\ R = R_0 - \sigma \\ \theta = \dfrac{r \cdot \lambda}{R} \end{cases}$$



sendo R o raio vetor de um dado paralelo (à latitude ϕ), R_0 o raio vetor do paralelo de referência (à latitude ϕ_0), N_0 o raio de curvatura na direção da primeira vertical perpendicular à direção do meridiano (à latitude ϕ_0), r o raio de paralelo à latitude ϕ e σ o arco de meridiano entre os paralelos.

$$r = N \cdot \cos\phi$$

$$N = \frac{a}{\left(1 - e^2.\sin^2\phi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sigma = a \cdot \left(1 - e^2\right) \cdot \left\{ A \cdot (\phi - \phi_0) - \frac{B}{2} \cdot (\sin 2\phi - \sin 2\phi_0) + \frac{C}{4} \cdot (\sin 4\phi - \sin 4\phi_0) - \right.$$
$$\left. - \frac{D}{6} \cdot (\sin 6\phi - \sin 6\phi_0) + \frac{E}{8} \cdot (\sin 8\phi - \sin 8\phi_0) - \frac{F}{10} \cdot (\sin 10\phi - \sin 10\phi_0) \right\}$$

Nota: na expressão do σ (arco de meridiano) o valor de ***e*** corresponde à excentricidade do elipsoide de Bessel (não confundir com o valor de *e* correspondente ao coeficiente da expressão do módulo da deformação linear na projeção de Bonne, que se encontra no enunciado do exercício.

$$e^2 = f \cdot (2 - f)$$

Elementos da elipse de Tissot (semieixo maior e menor)

$$\begin{cases} k_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2} \cdot \left[(e+g) + \sqrt{(e-g)^2 + 4 \cdot f^2} \right]} \\ \\ k_2 = \sqrt{\dfrac{1}{2} \cdot \left[(e+g) - \sqrt{(e-g)^2 + 4 \cdot f^2} \right]} \end{cases}$$

Respetivas direções

$$tg2\alpha = \frac{2f}{(e-g)}$$

Módulos da deformação angular máxima

$$tg\delta_m = \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \right)$$

Respetivos azimutes dessas deformações

$$tg\alpha_m = \pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$